

L'equazione di Laplace: una prospettiva storico-epistemologica.

L'equazione di Laplace è davvero di Laplace?

Miglena Asenova¹ e Sergio Polidoro²

¹*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo,*

²*Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia*

1. Introduzione

L'equazione oggi detta “di Laplace” raggiunse una notevole visibilità grazie alla pubblicazione della famosa opera di Pierre-Simon Laplace *Traité de Mécanique Céleste* (1799). Laplace ebbe il merito di mettere a punto una teoria analitica per trattare problemi dell'astronomia intesa come “meccanica celeste”. In quel contesto, l'equazione modella il problema dell'attrazione gravitazionale che uno sferoide esercita su un punto materiale generico. Tuttavia l'equazione era già nota a Leonhard Euler, che l'aveva ottenuta nel 1752¹ in un lavoro nel quale descrive il moto di un fluido incompressibile. Adottando una prospettiva epistemologica e mettendo a confronto i contributi di Euler e di Laplace, si discute di seguito la questione se sia corretto associare solamente il nome di Laplace all'equazione che stiamo considerando.

2. L'equazione nei lavori di Euler e di Laplace

Il procedimento seguito da Euler nella modellizzazione del moto di un fluido incompressibile si basa su due punti fondamentali:

- (i) il vettore velocità risulta essere il gradiente di una funzione potenziale S ;
- (ii) per il principio di conservazione della massa, la divergenza di questo campo vettoriale è nulla. Dalle precedenti due affermazioni segue immediatamente il fatto che

$$\operatorname{div}(\nabla S) = \Delta S = 0$$

che è il punto di arrivo del ragionamento di Euler. È importante sottolineare il fatto che Euler non sviluppa una metodologia generale per la costruzione di soluzioni dell'equazione $\Delta S = 0$, ma si limita ad esibire funzioni polinomiali che verificano questa equazione.

L'approccio di Laplace è invece di natura diversa: egli intende dimostrare che la funzione del potenziale gravitazionale soddisfa l'equazione che lui ha già in mente e che chiama “equazione notevole” (Laplace, 1799, libro II, p. 137).

¹La prima pubblicazione dell'opera di Euler che contiene questo risultato, e alla quale ci riferiamo in questo lavoro, avvenne però solo nove anni più tardi, nel 1761.

Anche Laplace si concentra sul modello di un fenomeno fisico ma, a differenza di Euler, egli cerca di formulare un principio generale per determinare i potenziali gravitazionali. Infatti, egli osserva che il potenziale gravitazionale di una particella di massa m_1 e posizione x_0 che agisce su una particella di massa m_2 situata in x è

$$F(x) = \frac{gm_1m_2}{|x_0 - x|}$$

e verifica l'equazione $\Delta F(x) = 0$ per ogni $x \neq x_0$. Utilizzando un principio di superposizione degli effetti dell'attrazione delle singole molecole scrive

$$\Delta V(x_0) = \int_M \Delta \frac{m_1m(x_0)}{|x_0 - x|} dx = 0,$$

giungendo alla conclusione che il potenziale gravitazionale V deve soddisfare l'equazione $\Delta V = 0$. Quella di Laplace sembra quindi, almeno nell'intento, una dimostrazione del fatto che il potenziale gravitazionale soddisfa necessariamente quella equazione.

2. Conclusioni

Euler fu il primo a scrivere l'equazione che oggi porta il nome di Laplace nella forma $\operatorname{div}(\nabla S) = \Delta S = 0$ in un lavoro sulla modellizzazione dei fluidi in moto, che presenta un metodo successivamente esteso ad altri fenomeni fisici. Laplace, che conosceva il lavoro di Euler (Bottazzini, 1981, p. 243) e aveva studiato e ben compreso la portata innovatrice dell'equazione da lui ottenuta, intuì che il potenziale gravitazionale dovrebbe verificare l'equazione in questione e mostrò che (nel vuoto) questa congettura era corretta, iniziando poi una ricerca sistematica delle soluzioni di $\Delta V = 0$.

Sia per il modo mirato con cui Laplace usa l'equazione in questione, sia per le ricadute che il suo lavoro con essa ha avuto sugli sviluppi della teoria del potenziale e sulle applicazioni alla teoria dell'elettromagnetismo, riteniamo che, nonostante dal punto di vista storico-cronologico la paternità sia da attribuire a Euler, dal punto di vista epistemologico sia corretto sottolineare il contributo di Laplace. Crediamo pertanto che essa dovrebbe portare il nome di entrambi, cioè chiamarsi "equazione di Euler-Laplace".

Bibliografia

- Bottazzini, U. (1981). *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*. Torino: Boringhieri.
- Euler, L. (1761). *Principia motus fluidorum*. Disponibile da <http://eulerarchive.maa.org/pages/E258.html>
- Laplace, P.S. (1799). *Traité de Mécanique Céleste*. Paris: Duprat.

Parole chiave: Equazione di Laplace; Equazioni alle Derivate Parziali; Mécanique céleste; Euler; Dinamica dei fluidi.